Д. СЕРІКБАЕВ АТЫНДАҒЫ ШЫҒЫС ҚАЗАҚСТАН МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Жоғары математика кафедрасы

Дәрістік сабақ тақырыбы:

САНДЫҚ ҚАТАРЛАР

Сандық қатар, жинақтылығы және қосындысы.
Геометриялық қатар.
Сандық қатардың жинақтылығының қажетті шарты.

Оң қатарлардың жинақтылық белгілері:

- **салыстыру белгілері;**
- **Даламбер белгісі;**
- **Кошидің радикалдық және интегралдық белгілері.**

Құрастырған: Бейсебай П.Б.
beisebay@mail.ru

Дәрістік сабақтың мақсаты:

Сандық қатар, қатардың жинақтылығы мен қосындысы ұғымдарын енгізу және оң қатарлардың жинақтылық белгілерімен танысу.

Мысалдар көмегімен тақырыпты бекіту.

Тақырыптар бойынша теориялық сұрақтар:

- **Сандық қатар;**
- **Сандық қатардың жинақтылығы;**
- **Сандық қатардың қосындысы;**
- **Геометриялық қатар;**
- **Сандық қатардың жинақтылығының қажетті шарты;**
- **Гармониялық және жалпы гармониялық қатар;**
- **Оң қатарлардың жинақтылық белгілері:**
  - **салыстыру белгілері;**
  - **Даламбер белгісі;**
  - **Кошидің радикалдық белгісі;**
  - **Кошидің интегралдық белгісі.**

4.1 Сандық қатар, жинақтылығы және қосындысы

Қандайда бір

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

сандар тізбегі берілсін.

«*Тізбек берілді*» дейміз, егер $a_n = f(n),\quad n \in N$ функциясы берілсе.

Егер осы тізбектің мүшелерін «+» белгісімен біріктірсек, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

түріндегі өрнегін *сандық қатар* деп атаймыз, мұндағы

- $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *сандары қатардың мүшелері*;
- a_n *қатардың n-ші мүшесі* немесе *жалпы мүшесі* деп аталады.

«Қатар берілді» деп тізбек берілген жағдайда айтамыз, яғни a_n берілсе.

Мысал 1. Қатар алғашқы $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \ldots$ мүшелерімен берілген.

Қатардың жалпы мүшесін жазыңыз.

Шешуі: Қатардың мүшелерін олардың нөмірлерімен байланыстырсақ:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1},\ a_2 = \frac{2^2}{2+1},\ a_3 = \frac{3^2}{3+1},\ a_4 = \frac{4^2}{4+1} \Rightarrow a_n = \frac{n^2}{n+1}, n \in N$$

екені шығады. a_n белгілі, яғни қатар берілді.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының алғашқы «n» мүшелерінің қосындысы оның n-*ші дербес қосындысы* деп аталады, да

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

түрінде белгіленеді. Демек,

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

.................................,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

....

$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots -$ дербес қосындылар тізбегі - сан тізбегі.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегін қарастырамыз. Үш жағдай болуы мүмкін:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ - сан;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - жоқ.

1) жағдайында $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары *жинақты*, ал S саны осы *қатардың қосындысы* деп аталады, яғни бұл жағдайда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

деп аламыз.

2) және 3) жағдайларында $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары *жинақсыз* деп аталады. Жинақсыз қатардың қосындысы болмайды.

Мысал 2.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Бұдан

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$ яғни қатар жинақты және

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

2. $1+1+1+\ldots+1+\ldots$ қатарын зерттейік: $S_n=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n}=n$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty\Rightarrow$ қатар жинақсыз.

3. $1-1+1-1+1-1+\ldots$ қатарын зерттейік:

$$S_n=\begin{cases}1, & \text{егер } n-\textit{так}\\ 0, & \text{егер } n-\textit{жуп}\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n \text{ шегі жоқ.}$$

Берілген қатар жинақсыз.

Сандық қатардың қасиеттері:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \lambda S.$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$ және $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$ болса, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_1 \pm S_2.$$

3) Қатардың санаулы ғана мүшелерін өзгерткеннен оның жинақтылығы өзгермейді.

Анықтама 1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының алғашқы n мүшесін алып тастағанда пайда болатын

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

қатары, осы (1) қатарының n *-ші қалдығы* деп аталады да R_n деп белгіленеді:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Егер қатар жинақты болса, онда

$$R_n = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots\right) - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) =$$

$$= S - S_n.$$

Бұдан

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) \Rightarrow \left| \lim_{n\to\infty} S_n = S \right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Сонымен:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - жинақты } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - жинақты } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

4.2 Геометриялық қатар

Геометриялық прогрессия берілсін:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ \ldots$$

Осы прогрессияның мүшелерінен құрылған

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad (a \neq 0) \qquad (2)$$

қатары *геометриялық қатар* деп аталады.

Прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысы

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1$$

формуласымен есептелінетіні белгілі.

Осы қосындының шегін табайық:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}.$$

q шамасына қатысты келесі жағдайларды қарастырамыз:

1) Егер $|q|<1$ болса, онда $n\to\infty$ болғанда $q^n\to 0$. Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$

онда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, яғни (2) қатары жинақты.

2) Егер $|q|>1$ болса, онда $n\to\infty$ болғанда $q^n\to\infty$. Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

онда (2) қатары жинақсыз.

3) Егер $|q|=1$ болса, онда:

а) $q=1$ болғанда (2) қатары

$$a+a+a+\ldots+a+\ldots$$

түріне келеді. Ол үшін

$$S_n = n\cdot a \text{ және } \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

яғни (2) қатары жинақсыз;

б) $q=-1$ болғанда (2) қатары

$$a-a+a-a+\ldots-$$

түріне келеді. Бұл жағдайда

$$S_n = \begin{cases} 0, & n-жуп \\ a, & n-так \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ шегі жоқ, (2) қатары жинақсыз.

Тұжырым:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n - \begin{cases} \textit{жинақты} \ \text{және} \ \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \dfrac{a}{1-q}, \text{ егер } |q|<1 \text{ болса,} \\ \textit{жинақсыз}, \text{ егер } |q| \geq 1 \text{ болса.} \end{cases}$$

<u>Мысал 3</u>. $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}} + \ldots$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: берілген қатарды

$$2^3 + 2^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

түрінде жазуға болады. Олай болса қатар $a = 2^3$ және $q = \frac{1}{2}$ болатын геометриялық қатарын береді. Бұл қатар үшін

$$|q| = \frac{1}{2} < 1$$

болғандықтан жинақты және $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \ldots = \dfrac{2^3}{1 - \frac{1}{2}} = 2^4.$

4.3 Сандық қатардың жинақтылығының қажетті шарты

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты болса, онда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

$$a_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1}$$

Бұдан

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ теңдігінен қатардың жинақтылығы алынбайды.

Мысал 4. Г*армониялық қатарды* жинақтылыққа зеттеңіз.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (3)$$

Бұл арада $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Қатарды жинақтылыққа зерттейік, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегін қарастырайық:

$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ тізбегінің өспелі және $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=e$ екені белгілі. Онда кез келген $n\in N$ үшін $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ теңсіздігі орындалады.

e негізінде теңсіздікті логарифмдесек:

$$n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1\Rightarrow\frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}\Rightarrow\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n. \qquad (4)$$

Қатардың n-ші дербес қосындысын қарастырайық:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}>\left|(4)\right|>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\ldots$$

$$\ldots+(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1)$$

$$S_n>\ln(n+1)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n\geq\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n\geq+\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{ – жинақсыз.}$$

Сонымен $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ болғанымен $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - жинақсыз.

3) Егер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз болады.
(қатардың жинақсыздығының жеткілікті шарты).

Мысал 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+5}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0$ болғандықтан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+5}$

қатары жинақсыз.

4.4 Оң қатарлардың жинақтылық белгілері

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары *оң таңбалы қатар* (*оң қатар*) деп аталады, егер кез келген *n* нөмірі үшін $a_n > 0$ болса.

Оң қатардың жинақтылығының *белгілері:*

I Салыстыру белгісі

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары берілсін.

Егер кез келген $n \in N$ үшін

$$a_n \le b_n \qquad (5)$$

теңсіздігі орынды болса, онда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ - жинақты } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - жинақты,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - жинақсыз} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ - жинақсыз.}$$

Үлгі қатарлар:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad a \neq 0$ - геометриялық қатар $\begin{cases} |q|<1 \text{ болса } \textit{жинақты}, \\ |q|\geq 1 \text{ болса } \textit{жинақсыз}. \end{cases}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ - жалпы гармониялық қатар $\begin{cases} \lambda>1 \text{ болса } \textit{жинақты}, \\ \lambda\leq 1 \text{ болса } \textit{жинақсыз}. \end{cases}$

Мысал 6.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - жинақты қатар: $\lambda = 2 > 1.$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - жинақсыз гармониялық қатар: $\lambda = 1.$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ - жинақсыз қатар: $\lambda = \frac{1}{2} < 1.$

Мысал 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: берілген қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ жинақты $\left(|q| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1 \right)$ геометриялық қатарымен салыстырайық: $\frac{1}{3+2^n} < \frac{1}{2^n}$.

Бұдан берілген қатар *I салыстыру белгісі* бойынша жинақты.

Мысал 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Жалпы мүшесі $a_n = \frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n}$.

Салыстыру мақсатында $b_n = \frac{1}{n}$ жинақсыз гармониялық қатарын қарастырайық:

$$\frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n} > \frac{1}{n}.$$

Бұдан берілген қатар *I салыстыру белгісі* бойынша жинақсыз.

II Салыстыру белгісі (Шектік салыстыру белгісі).

1) Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\kappa\neq 0$ және κ- сан болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ және $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ оң қатарларының екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз болады.

2) Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$ болса, онда:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ - жинақты $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - жинақты,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - жинақсыз $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ - жинақсыз.

3) Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=+\infty$ болса, онда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - жинақты $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ - жинақты,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ - жинақсыз $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$- жинақсыз.

Мысал 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{5n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Шектік салыстыру белгісін қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{5}\neq 0$$

II салыстыру белгісі бойынша

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{5n} \quad \text{және} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

қатарларының екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз.

Олай болса гармониялық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{ - жинақсыз } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{5n}\text{ - жинақсыз.}$$

Нұсқау: *II салыстыру белгісі* қатардың жалпы мүшесі көпмүшеліктердің қатынасы немесе көпмүшеліктердің түбірлерінің қатынасы түрінде берілсе қолдануға қолайлы.

4.5 Даламбер белгісі

(1717-1783 ж.ж., француз математигі)

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$ болса, онда

- $D < 1$ болғанда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты,
- $D > 1$ болғанда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз.

Ескерту: $D = 1$ болғанда Даламбер белгісі қатардың жинақтылығы туралы ешқандай қорытынды бермейді.

Нұсқау: Даламбер белгісін қатардың жалпы мүшесінің құрамында a^n немесе $n!$ түріндегі көбейткіштер бар жағдайда қолдану қолайлы болады.

Мысал 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Даламбер белгісін қолданамыз:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$D = 0 < 1.$ Олай болса аталған белгі бойынша қатар жинақты.

Мысал 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Даламбер белгісін қолданамыз:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n^2}{3^n \cdot (n+1)^2} = 3\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 3\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 3$$

$D = 3 > 1$ болғандықтан, аталған белгі бойынша қатар жинақсыз.

4.6 Кошидің радикалдық белгісі

(1789-1857 ж.ж., француз математигі)

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$ болса, онда

- $K < 1$ болғанда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты,
- $K > 1$ болғанда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз.

Ескерту: $K = 1$ болғанда Кошидің радикалдық белгісі қатардың жинақтылығы туралы ешқандай қорытынды бермейді.

Нұсқау: Бұл белгіні қатардың жалпы мүшесінің *n дәрежелі түбірі* оңай алынатын жағдайларда қолдану тиімді.

Мысал 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Кошидің радикалдық белгісін қолданамыз:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1}=\frac{1}{3}<1.$$

Сонымен $K<1$, олай болса қатар жинақты.

Мысал 13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Кошидің радикалдық белгісін қолданамыз:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e>1.$$

Сонымен, $K=e>1$ болса берілген қатар жинақсыз.

4.7 Кошидің интегралдық белгісі

Егер:

- $a_n > 0, \forall n \in N;$
- $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ...;$
- $f(\mathrm{x})$ функциясы $[1, +\infty)$ аралығында үзіліссіз және кемімелі;
- $\forall n \in N \quad f(n) = a_n$ болса,

онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары мен $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ дәйексіз интегралының екеуі де жинақты немесе жинақсыз болады.

Нұсқау: Бұл белгіні қатардың жалпы мүшесі туындылайтын функциядан интеграл табу оңай болған жағдайларда қолдану тиімді.

Ескерту: $x = n \quad (n = 1,2,3,...)$ нүктелерінде f(n)-ге тең f(x) функциясын тұрғызу үшін, f(n) функциясының натурал аргументін, яғни n - ді үздіксіз аргумент x - ке ауыстырамыз. *Мысалы*:

$$f(n) = \frac{1}{n(n+1)} \text{ болса, онда } f(x) = \frac{1}{x(x+1)};$$

$$f(n) = \frac{1}{n^2} \text{ болса, онда } f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Мысал 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Кошидің интегралдық белгісін қолданамыз:

$f(n)=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ болғандықтан, $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ болады.

Бұл функция $[1,+\infty)$ аралығында үзіліссіз және кемімелі.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\lim_{b\to+\infty}[\ln\ln(b+1)-\ln\ln 2]=\infty$$

Дәйексіз интеграл *жинақсыз*, онда берілген қатар да *жинақсыз*.

Мысал 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Кошидің интегралдық белгісін қолданамыз:

$$f(n)=\frac{n}{e^{n^2}} \quad \text{болғандықтан,} \quad f(x)=\frac{x}{e^{x^2}} \quad \text{болады.}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{x}{e^{x^2}}dx=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_1^b e^{-x^2}d\left(-x^2\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{e^{-x^2}}{2}\right)\Bigg|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2e^{b^2}}+\frac{1}{2e}\right)=\frac{1}{2e}$$

Дәйексіз интеграл жинақты, онда берілген қатар да жинақты.

Қолданылған әдебиеттер:

1. Жантасов Т.Г. Қатарлар тақырыбынан әдістемелік нұсқаулар. ВКГТУ, 2004. - 186 Б.

2. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.

3. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1985, Т. 2. - 526 С.

4. Письменный Д.Т. Высшая математика. – М.: Айрис-Пресс, 2006. - 256 С.

Назарларыңызға рахмет!